c- En déduire le signe de $\varphi(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a- Montrer que f est dérivable en 0.

b- Vérifier que pour tout $x \in IR^*$ on a : $f'(x) = \dfrac{x\varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$.

c- Montrer que $f(a) = a(2 - a)$.

d- Etudier les variations de f, puis construire la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

(pour la construction on prendra $a = 1,6$).

3) On considère la fonction F définie sur IR^+ par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

Désignons par $L = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

a- Montrer que : Pour tout $t \in [\ \ln(2), +\infty\ [$; $f(t) \leq 2t^2e^{-t}$.

b- A l'aide de deux intégrations par parties montrer que

$$\int_{\ln(2)}^x t^2e^{-t}dt = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \ln 2 + 1.$$

c- Déduire que $L \leq F(\ln(2) + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \ln 2 + 1$.

4) n désigne un entier naturel non nul.

a- Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a :

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-nx} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}.$$

b- Montrer que $\forall x \in IR^+; 0 \leq \int_0^x f(t)e^{-nt}dt \leq \dfrac{a(2-a)}{n}$.

c- Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\int_0^x t^2e^{-nt}dt \right) = \dfrac{2}{n^3}$.

d- Montrer enfin que $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[2\left(1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{n^3}\right) \right]$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn